12 - лекция. Біртекті дифференциалдық теңдеулер. Сызықты дифференциалдық теңдеулер.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

12 - лекция

12 Біртекті дифференциалдық теңдеулер. Сызықты дифференциалдық теңдеулер.

12.1 Біртекті дифференциалдық теңдеулер

Анықтама. $\varphi(x;y)$ функциясы x пен y бойынша α-шы ретті біртекті функция деп аталады, егер кез келген t үшін: $\varphi(tx;ty)=t^{\alpha}\varphi(x;y)$ теңдігі орындалатын болса.

Анықтама. Егер $M(x;y)$ және $N(x;y)$ - бірдей ретті біртекті функциялар болса, онда $M(x;y)dx+N(x;y)dy=0$ теңдеуі біртекті дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Егер $f(tx;ty)=f(x;y)$, яғни, $\alpha=0$, онда

$$y'=f(x,y) \qquad (1)$$

теңдеуі біртекті болады.

Біртекті дифференциалдық теңдеу айнымалыларды ауыстыру көмегімен айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіріледі:

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux,\ y'=u+xu' \text{ немесе } dy=udx+xdu. \qquad (2)$$

Е с к е р т у:

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

түріндегі теңдеу біртекті дифференциалдық теңдеуге келтіріледі.

17.1 мысал. $(x-y+1)dx=(2x+y-1)dy$ теңдеуін біртекті дифференциалдық теңдеу түріне келтір.

Шешуі. Айнымалыларды ауыстырамыз (h және t - тұрақтылар):

$$\begin{cases} x=u+h \\ y=v+t \end{cases}\Rightarrow |dx=du,dy=dv|\Rightarrow (u-v+h-t+1)du=(2u+v+2h+t-1)dv.$$

h және t -ны бос мүшелері нөлге тең болатындай етіп, таңдап аламыз:

$$\begin{cases} h-t+1=0 \\ 2h+t-1=0 \end{cases}\Rightarrow h=0,t=1.$$

Сонымен, $x=u, y=v+1$ деп жаңа айнымалылар енгізсек,

$(u-v)du=(2u+v)dv$ түріндегі біртекті дифференциал теңдеуге келеміз.

12.2. Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

Анықтама. Егер дифференциал теңдеу ізделінді функция мен оның туындысы бойынша сызықты болса, ондай теңдеуді сызықты дифференциал теңдеу деп атаймыз.

Бірінші ретті сызықты дифференциал теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad (3)$$

$$y'+P(x)y=0, \qquad (4)$$

(3) – біртектес емес, ал (4) – біртектес дифференциал теңдеу деп аталады.

Біртектес дифференциал теңдеудің жалпы шешімін табалық:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)dx=0\Rightarrow \ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|\Rightarrow$$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx} \qquad (5)$$

12 - лекция. Біртекті дифференциалдық теңдеулер. Сызықты дифференциалдық теңдеулер.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

Лагранж әдісін (тұрақты шаманы вариациалау әдісі) қолданып, (3) теңдеуінің шешімін алуға болады. Шешімді (5) түрінде іздейміз, мұндағы $C = C(x)$ - белгісіз функция. Онда (3) теңдеуіндегі y' -тың орнына:

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx},$$

ал y - тің орнына (5)-ті қойсақ:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow C'(x) = Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$$

Осы табылған $C(x)$ -ті (5)-ке қоя отырып, (3) теңдеуінің жалпы шешімін аламыз.

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right) \qquad 6).$$

Е с к е р т у: $C_1e^{-\int P(x)dx}$ - (4) теңдеуінің жалпы шешімі, ал $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ - (3) теңдеуінің дербес шешімі ($C_1 = 0$ болғанда) болғандықтан, кез келген ретті сызықтық теңдеу үшін ақиқат болатын мынадай тұжырым жасауға болады: біртектес емес сызықты теңдеудің жалпы шешімі оған сәйкес біртекті сызықтық теңдеудің жалпы шешімі мен біртексіз сызықты теңдеудің дербес шешімінің қосындысына тең ($C_1 = 0$ болғандағы).

17.2 мысал. $(x^2 - x)y' + y = x^2(2x-1)$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз. Бастапқы шарт *y(-2)=2* болғандағы, Коши есебін шешіңіз.

►Берілген теңдеуді екі жағын да $x^2 - x \neq 0$ өрнегіне бөліп, (3) түріне келтіреміз:

$$y + \frac{y}{x^2 - x} = \frac{x^2(2x-1)}{x^2 - x}.$$

Мұнда

$$P(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)},. \qquad Q(x) = \frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)}. = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Берілген теңдеудің (6) формуласына сәйкес жалпы шешімі:

$$y = e^{-\int\frac{dx}{x(x-1)}}\left(\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\int\frac{dx}{x(x-1)}}dx + c\right). \ (7)$$

Осы шешімнің ішіндегі интегралдарды шығаралық:

$$\int\left(\frac{dx}{x(x-1)}\right) = \left|\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)}, A = 1, B = 1.\right| = \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx = -\ln|x| + \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|,$$

$$\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}dx = \int\frac{x(2x-1)}{x-1}\left|\frac{x-1}{x}\right|dx = \pm\int(2x-1)dx = \pm(x^2 - x),$$

мұндағы $\langle + \rangle$ және $\langle - \rangle$ таңбалары $\left|\frac{x-1}{x}\right| = \pm\frac{x-1}{x}$ теңдігінен шығады. Табылған интегралдарды (7) шешіміне қойсақ, берілген теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = e^{-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}\left(\pm(x^2 - x) + C\right) = \left|\frac{x}{x-1}\right|\left(\pm(x^{2-x}) + C\right) = \pm\frac{x}{x-1}\left(\pm x(x-1) + C\right) = x^2 + \frac{Cx}{x-1}.$$

y(-2)=2 бастапқы шартын қанағаттандыратын дербес шешімі:

$$2 = 4 - \frac{2C}{-2-1}, C = -3, y = x^2 - \frac{3x}{x-1}. ◄$$

12 - лекция. Біртекті дифференциалдық теңдеулер. Сызықты дифференциалдық теңдеулер.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

Сонымен қатар, (3) сызықты дифференциал теңдеуін *Бернулли әдісін* қолданып та, интегралдауға болады. Екі белгісіз функция *u(x), v(x)* енгіземіз және *y=u(x)v(x) (Бернулли ауыстыруы)* деп аламыз. Онда $y' = u'v + uv'$. y және y' өрнектерін (3) теңдеуіне қоя отырып, $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$ немесе

$$(v' + P(x)v)u + u'v = Q(x). \qquad (8)$$

теңдеуін аламыз. Жақшаның ішіндегі өрнекті $v' + P(x)v = 0$ десек, бұл айнымалысы ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Осы теңдеуді шешіп, *v*-ны табуға болады. Енді жақшаның ішіндегі өрнекті нөлге тең деп алғандықтан, (8) теңдеуі мына түрге келеді: $u + u'v = Q(x)$. Бұл теңдеуге жоғарыда табылған *v*-ны қойсақ, бұл да айнымалылары ажыратылатын теңдеу болады, бұл жерден *u*-ды табамыз. Табылған *u* мен *v*-ны Бернулли ауыстыруына қоятын болсақ, берілген теңдеудің жалпы шешімі шығады.

Әдебиеттер

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2009г.
3. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 1,2,3 бөлім Бастау, 2008
4 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2002г.